Total number of pages—16

25T MATH

2015

MATHEMATICS

https://www.assamboard.com

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Contd.

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If $A = \{ 0, 1, 3 \}$, what is the number of relations on A ?

যদি $A = \{ 0, 1, 3 \}$ হয়, তেন্তে Aৰ ওপৰত কিমানটা সম্বন্ধ হ'ব?

(b) Find the principal value of $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

$sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$ ৰ মুখ্যমান উলিওৱা।

(c) If $[5\ \ 6\ \ 7]A = [13\ \ 23]$, what is the order of the matrix A ?

যদি $[5\ \ 6\ \ 7]A = [13\ \ 23]$; A ৰ ঘাত কিমান?

(d) If A is a nonsingular matrix such that $A^2 + A - I = 0$, what is A^{-1} ?

যদি A এটা অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ য'ত $A^2 + A - I = 0$, তেন্তে A^{-1} কিমান হ'ব?

(e) What is the co-factor of 7 in the determinant $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$?

$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ 7 মৌলটোৰ সহ উৎপাদক কিমান?

(f) Is the derivative of an even function even?

যুগ্ম ফলনৰ অৱকলজ যুগ্ম হয়নে?

(g) Is the function $f(x)=x^2,\ x\in \mathbb{R}$ increasing?

$f(x)=x^2,\ x\in \mathbb{R}$ ফলনটো বৰ্ধমান ফলন হয়নে?

(h) What are the direction cosines of the vector $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$?

ভেক্টৰ $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ৰ দিশাংক কিমান?

(i) If the distance of a plane from the origin be 'd' and direction cosines of the normal to the plane through origin be (l, m, n), what are the co-ordinates of the foot of the normal?

যদি মূলবিন্দুৰ পৰা এখন সমতলৰ দূৰত্ব 'd' আৰু মূলবিন্দুৰে যোৱা সমতলৰ অভিলম্বৰ দিশাংক (l, m, n) হয়, তেন্তে অভিলম্বৰ পাদবিন্দুৰ স্থানাংক কি হ'ব?

(j) What are the equations of the planes parallel to xz-plane and at a distance 'a' from it ?

xz-সমতলৰ সমান্তৰাল আৰু 'a' দূৰত্বত থকা সমতলবোৰৰ সমীকৰণ কি?

2. A function $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ is defined by $f(x) = 2x^2$. Is the function f one-one, and onto ? Justify your answer. 2+2=4

এটা ফলন $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(x) = 2x^2$ । ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে? যুক্তি সহকাৰে উত্তৰ দিয়া।

OR / অথবা

Let L be the set of all lines in the xy-plane and R be the relation in L defined by $R = \left\{ \left(l_i, l_j\right) \middle| \ l_i \text{ parallel to } l_j, \ \forall i, j \right\}$. Show that R is an equivalence relation. Find the set of all lines related to the line $y = 7x + 5$. https://www.assamboard.com 3+1=4

xy-সমতলৰ সকলো ৰেখাৰ সংহতি L আৰু Lৰ ওপৰত R এটা সম্বন্ধ যত $R = \left\{ \left(l_i, l_j\right) \middle| \ l_i, l_j \text{ সমান্তৰাল}, \forall i, j \right\}$। দেখুওৱা যে R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ। লগতে $y = 7x + 5$ ৰেখাৰ সৈতে সম্বন্ধ থকা সকলো ৰেখাৰ সংহতি নিৰ্ণয় কৰা।

3. If $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)=\alpha$, prove that $x^2 = \sin 2\alpha$. 4

যদি $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)=\alpha$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $x^2 = \sin 2\alpha$.

4. If $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, find a matrix C such that $CAB = I = ABC$, where I is the 2×2 unit matrix. 4

যদি $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ আৰু $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ তেন্তে মৌলকক্ষ C উলিওৱা য'ত $CAB = I = ABC$, I হৈছে 2×2 আকাৰৰ একক মৌলকক্ষ।

OR / *অথবা*

Using elementary row operation, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 4

মৌলিক শাৰী প্ৰক্ৰিয়া ব্যৱহাৰ কৰি $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ প্ৰতিলোম মৌলকক্ষ উলিওৱা।

5. If $y + \sin y = \cos x$ then find the values of y for which $\frac{dy}{dx}$ is valid. 4

যদি $y + \sin y = \cos x$ হয়, তেন্তে yৰ কি মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx}$ যুক্তিসংগত হয়?

6. If a function is differentiable at a point, prove that it is continuous at that point. 4

প্ৰমাণ কৰা যে যদি এটা ফলন এটা বিন্দুত অৱকলনীয় হয়, তেন্তে ফলনটো সেই বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হ'ব।

OR / অথবা

Using Rolle's theorem, find at what points on the curve $y = \cos x - 1$ in $[0, 2\pi]$ the tangent is parallel to x-axis.

ৰ'লৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $y = \cos x - 1$ বক্ৰৰ $[0, 2\pi]$ অন্তৰালৰ কোনবোৰ বিন্দুত স্পৰ্শক x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হ'ব নিৰ্ণয় কৰা।

7. Evaluate ***any one*** of the integrals : 4

যি কোনো এটা অনুকলৰ মান উলিওৱা ঃ

(i) $\int_{1/3}^{1} \frac{\left(x - x^3\right)^{1/3}}{x^4} dx$

(ii) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

8. Prove that $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, when f is an odd function. Hence evaluate $\int_{-1}^{1} log\,\frac{2-x}{2+x}\,dx$. 4

প্ৰমাণ কৰা যে $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, যেতিয়া f এটা অযুগ্ম ফলন আৰু ইয়াৰ পৰা $\int_{-1}^{1} log\,\frac{2-x}{2+x}\,dx$ ৰ মান উলিওৱা।

9. Solve ***(any one)*** : 4

সমাধান কৰা ***(যিকোনো এটা)*** :

(i) $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + y = tan^{-1} x$

(ii) $x\,\frac{dy}{dx} = y - x\,tan\,\frac{y}{x}$

10. Find the equation of a curve passing through the origin, given that the slope of the tangent to the curve at any point (x, y) is equal to the sum of the co-ordinates of the point. 4

মূল বিন্দুৰ মাজেৰে অতিক্ৰম কৰা বক্ৰ এডালৰ সমীকৰণ উলিওৱা, যদি দিয়া থাকে যে বক্ৰডালৰ যি কোনো বিন্দু (x, y) ত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা বিন্দুটোৰ স্থানাংকৰ যোগফলৰ সমান।

11. Using vectors prove that angle in a semicircle is a right angle. 4

ভেক্টৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

OR / অথবা

Using vectors prove that

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

ভেক্টৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

12. Find the vector equation of a plane in normal form. 4

সমতলৰ অভিলম্ব আকাৰৰ ভেক্টৰ সমীকৰণটো উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the equation of a plane passing through a given point and perpendicular to a given vector in vector form.

নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰে যোৱা আৰু নিৰ্দিষ্ট ভেক্টৰৰ লম্বভাৱে থকা এখন সমতলৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

13. Assume that each child born is equally likely to be a boy or a girl. If a family has two children, what is the conditional probability that both are girls, given that

(i) the youngest is a girl,

(ii) at least one is a girl ? 4

প্ৰতিটো শিশুৱেই ল'ৰা বা ছোৱালী হৈ জন্ম লাভ কৰা ঘটনাটো সমসম্ভাব্য বুলি ধৰা হওক। যদি এটা পৰিয়ালৰ দুটা শিশু থাকে তেন্তে দুয়োটা শিশুৱে ছোৱালী হোৱাৰ চৰ্তাধীন সম্ভাৱিতা কিমান য'ত

(i) কনিষ্ঠতম শিশুটো ছোৱালী হয়,

(ii) কমেও এটি শিশু ছোৱালী হয়?

OR / অথবা

The probability of a shooter hitting a target is $\frac{3}{4}$. How many minimum number of times must he/she fire so that the probability of hitting the target at least once is more than $0 \cdot 99$?

এজন শ্বুটাৰে কোনো লক্ষ্যবস্তুক ভেদ কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{3}{4}$ । সৰ্বনিম্ন কিমান বাৰ তেওঁ গুলী নিক্ষেপ কৰিব লাগিব যাতে অতি কমেও এবাৰ লক্ষ্যবস্তুক ভেদ কৰাৰ সম্ভাৱিতা $0 \cdot 99$ তকৈ বেছি হয়?

14. If x, y, z are all different and

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

prove that $xyz = -1$. 6

যদি x, y, z সকলো বেলেগ আৰু

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0,$$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $xyz = -1$.

OR / অথবা

If $a \neq p$; $b \neq q$; $c \neq r$ and

$$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0,$$

then find the value of $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c}$.

যদি $a \neq p$; $b \neq q$; $c \neq r$ আৰু

$$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0,$$

তেন্তে $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c}$ ৰ মান উলিওৱা।

15. Find the maximum and minimum value of the following functions ; if exist. 3+3=6

তলৰ ফলন বোৰৰ, যদি আছে, গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা।

(i) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; $x\in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)=log\,x,\quad x>0$.

OR / অথবা

Find the maximum area of an isosceles triangle inscribed in the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ with its vertex at one end of the major axis. 6

এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তত অন্তৰ্লিখিত কৰা হ'ল যাতে ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু মুখ্যঅক্ষৰ এটা মূৰত থাকে। ত্ৰিভুজটোৰ গৰিষ্ঠ কালি উলিওৱা।

16. Evaluate : 6

মান উলিওৱা :

$$\int_0^1 tan^{-1}\frac{2x-1}{1+x-x^2}\,dx$$

OR / অথবা

Evaluate $\int_1^3 \left(x^2 + x\right) dx$ as the limit of a sum.

যোগৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি

$\int_1^3 \left(x^2 + x\right) dx$ ৰ মান উলিওৱা।

17. Find the area bounded by

$y = x^2$ and $y = |x|$ 6

$y = x^2$ আৰু $y = |x|$ ৰ দ্বাৰা আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the ratio in which the area bounded by the curves $y^2 = 12x$ and $x^2 = 12y$ is divided by the line $x = 3$. https://www.assamboard.com

$y^2 = 12x$ আৰু $x^2 = 12y$ বক্ৰদুটাই আগুৰা ক্ষেত্ৰক $x = 3$ ৰেখাৰে ভাগ কৰিলে ভাগ দুটাৰ অনুপাত উলিওৱা।

18. Show that the lines

$\vec{r} = \left(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) + \lambda\left(3\hat{i} - \hat{j}\right)$

and $\vec{r} = \left(4\hat{i} - \hat{k}\right) + \mu\left(2\hat{i} + 3\hat{k}\right)$ are coplanar.

Also, find the equation of the plane containing both these lines.

দেখুওৱা যে $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\lambda(3\hat{i}-\hat{j})$

আৰু $\vec{r}=(4\hat{i}-\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{k})$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয়। লগতে ৰেখা দুডালৰ মাজেৰে যোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

19. A factory makes tennis rackets and cricket bats. A tennis racket takes 1·5 hours of machine time and 3 hours of craftman's time in its making, while a cricket bat takes 3 hours of machine time and 1 hour of craftman's time. In a day the factory has the availability of not more than 42 hours of machine time and 24 hours of craftman's time. If the profit on racket and on a bat is Rs. 20 and Rs. 10 respectively, find the maximum profit of the factory when it works at full capacity. 6

এটা কাৰখানাত টেনিচ ৰেকেট আৰু ক্ৰিকেট বেট তৈয়াৰ কৰা হয়। এখন টেনিচ ৰেকেট তৈয়াৰ কৰিবৰ বাবে 1·5 ঘণ্টাৰ মেচিন সময় আৰু 3 ঘণ্টাৰ হস্ত কাৰিকৰী সময়ৰ প্ৰয়োজন হয়। আনহাতে, এখন ক্ৰিকেট বেট তৈয়াৰ কৰিবৰ বাবে 3 ঘণ্টাৰ মেচিন সময় আৰু 1 ঘণ্টাৰ হস্ত কাৰিকৰী সময়ৰ প্ৰয়োজন হয়। এদিনত মেচিন সময় 42 ঘণ্টা আৰু হস্ত কাৰিকৰী সময় 24 ঘণ্টাতকৈ বেছি উপলব্ধ নহয়। প্ৰতিখন ৰেকেট আৰু বেটৰ লাভৰ পৰিমাণ ক্ৰমে 20 টকা আৰু 10 টকা হ'লে কাৰখানাৰ সৰ্বোচ্চ লাভৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া ই পূৰ্ণ কাৰ্য্যক্ষমতাৰে চলি থাকে।

OR / অথবা

Minimize and maximize $Z = x + 2y$

subject to $x + 2y \geq 100$; $2x - y \leq 0$; $2x + y \leq 200$

$x, y \geq 0$.

$x + 2y \geq 100$; $2x - y \leq 0$; $2x + y \leq 200$; $x, y \geq 0$ সাপেক্ষে $Z = x + 2y$ ৰ সৰ্বনিম্ন আৰু সৰ্বোচ্চ মান উলিওৱা।

20. Assume that the chances of a patient having a heart attack is 40%. It is also assumed that a meditation and yoga course reduces the risk of heart attack by 30% and prescription of certain drug reduces its chances by 25%. At a time a patient can choose any one of the two options with equal probabilities. It is given that after going through one of the two options the patient selected at random suffers a heart attack. Find the probability that the patient followed a course of meditation and yoga. 6

ধৰিলোৱা এজন ৰোগীৰ হাৰ্ট এটেক হোৱাৰ সম্ভাৱনা 40%। লগতে ধৰা হ'ল যে ধ্যান আৰু যোগ চৰ্চাই হাৰ্ট এটেকৰ বিপদ 30% হ্ৰাস কৰে আৰু নিৰ্দিষ্ট ড্ৰাগ সেৱনে 25% হ্ৰাস কৰে। একোবাৰত একোজন ৰোগীয়ে দুই বিকল্পৰ যি কোনো এটাহে বাছনি কৰিব পাৰে আৰু দুয়োটা বিকল্পৰে সম্ভাৱনা সমান। দেখা গ'ল যে দুই বিকল্পৰ কোনো এটা যাদৃচ্ছিক ভাৱে বাছনি কৰাৰ অন্তত এজন ৰোগী হাৰ্ট এটেকত পতিত হ'ল। ৰোগীজনে ধ্যান আৰু যোগ চৰ্চা অনুসৰণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

OR / অথবা

In a 20-question true-false examination, suppose a student tosses a fair coin to determine his answer to each question. If the coin falls head, he answers 'true'. If it falls tail, he answers false. Find the probability that he answers at least 12 questions as true.

কোনো পৰীক্ষাত সঁচা-মিছা ঠাঁচৰ প্ৰশ্নৰ সংখ্যা 20টা আছে। ধৰা হ'ল এজন ছাত্ৰই প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ উত্তৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ এটা নিখুঁত মুদ্ৰা টছ্ কৰে। যদি মুদ্ৰাটোৰ মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়, তেওঁ প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ 'সঁচা' লিখে। আনহাতে যদি মুদ্ৰাটোত পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হয়, তেন্তে উত্তৰটো 'মিছা' লিখে। তেওঁ কমপক্ষে 12টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ শুদ্ধকৈ লিখাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

——— × ———